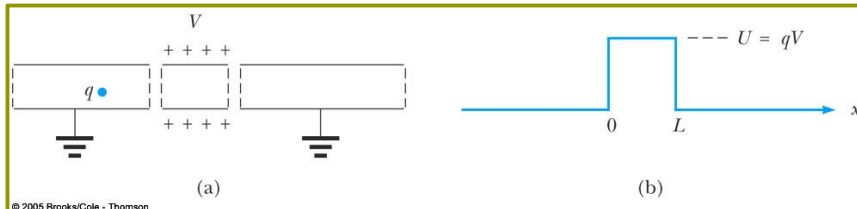


7장 터널링 현상

tunneling phenomena ; 퍼텐셜 벽에 부딪힌 입자는 벽을 투과할 확률을 갖는다.

field emission(장방출), 방사선 붕괴, Josephson 효과, STM(scanning tunneling microscope)

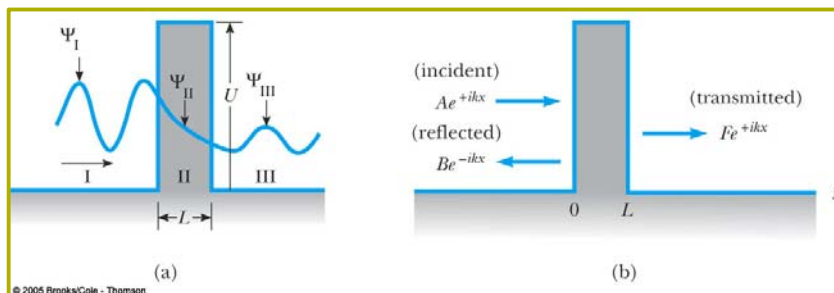
7.1 사각 장벽(The Square Barrier)



square potential barrier(네모난 퍼텐셜 장벽)

$$U = 0 \quad \text{at } x < 0, x > L$$

$$U = qV \quad \text{at } 0 < x < L$$



▶ 고전적 입자 ; 왼쪽으로부터 벽에 입사

1) $E > U$; potential 보다 에너지가 더 큰 입자

$x = 0$; 척력을 받아 속력이 줄어들어

$0 < x < L$; $E = U + \frac{1}{2}mv^2$ 을 만족하는 속력으로 오른쪽으로 진행

$x = L$; 오른쪽으로 힘을 받아 원래의 속력을 회복하여 오른쪽으로 진행

2) $E < U$; potential이 입자의 에너지보다 더 클 경우

$x = 0$ 에서 척력을 받아 전부 반사한다.

▶ 양자론적 입자 ; 파동적 현상, 입자의 에너지에 무관하게, 입자가 갈 수 없는 곳은 없다.

1) $E > U$

$x = 0$; 일부 투과 일부 반사

$0 < x < L$; 투과와 반사가 경계면에서 일어난다.

$x \geq L$; 투과된 입자, 100% 투과조건이 존재

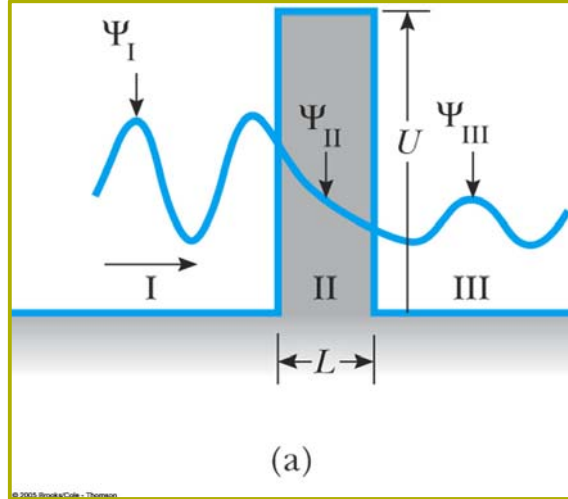
2) $E < U$

$x = 0$; 일부 투과 일부 반사

$0 < x < L$; 입자의 존재확률을 갖는다.

$x \geq L$; 투과된 입자

tunneling phenomena ; $E < U$ 인 경우 벽 반대쪽으로 입자가 투과할 확률을 갖는다



I 영역 : 자유입자 → 평면파

$$x < 0$$

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{i(-kx - \omega t)} \quad (7.1)$$

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$R = \frac{(\psi * \psi)_{\text{reflected}}}{(\psi * \psi)_{\text{incident}}} = \frac{B * B}{A * A} = \frac{|B|^2}{|A|^2} : \text{반사계수} \quad (7.2)$$

III 영역 : 자유입자 → 평면파

$$\psi(x,t) = Fe^{i(kx - \omega t)} + Ge^{i(-kx - \omega t)} \quad (7.3)$$

☺ $G = 0$; 입자를 반사시킬 장벽이 없다.

$$T = \frac{(\psi * \psi)_{\text{transmitted}}}{(\psi * \psi)_{\text{incident}}} = \frac{F * F}{A * A} = \frac{|F|^2}{|A|^2} : \text{투과계수} \quad (7.4)$$

$$R + T = 1$$

벽에 입사한 입자는 반사하거나 투과한다.

II 영역 : 장벽내부

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left\{ \frac{2m(U-E)}{\hbar^2} \right\} \psi(x)$$

$U - E > 0$ 이므로 해는 $e^{\pm \alpha x}$ 의 형태

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar} \quad (7.6)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} \right) e^{\pm \alpha x} = (\alpha)^2 e^{\pm \alpha x}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U-E)}} ; \text{투과깊이}$$

벽 내부에서의 완전한 파동함수는

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t} = Ce^{-\alpha x - i\omega t} + De^{\alpha x - i\omega t} \quad (0 < x < L) \quad (7.7)$$

$x = 0, x = L$ 에서 (1) 파동함수가 연속 (2) 1차 미분(기울기)이 연속 조건으로부터

$$A + B = C + D \quad (x = 0, \psi \text{의 연속}) \quad (7.8)$$

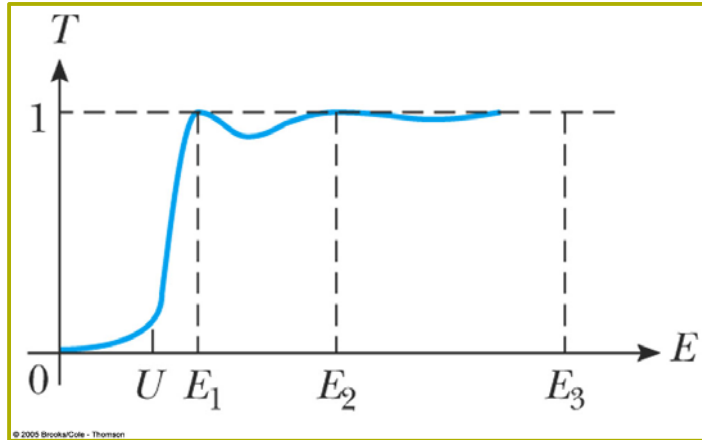
$$ikA - ikB = \alpha D - \alpha C \quad (x = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{의 연속})$$

$$Ce^{-\alpha L} + De^{+\alpha L} = Fe^{ikL} \quad (x = L, \psi \text{의 연속})$$

$$(\alpha D)e^{+\alpha L} - (\alpha C)e^{-\alpha L} = ikFe^{ikL} \quad (x = L, \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{의 연속})$$

B, C, D, F 를 A 의 비로 나타낼 수 있다.

$$T(E) = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[\frac{U^2}{E(U-E)} \right] \sinh^2 \alpha L \right\}^{-1} \quad (7.9)$$



transmission resonance(투과공명) : $T(E) = 1$, E_1, E_2, E_3 파동의 간섭, 입자의 파동적 성질

Ex 7.1) Transmission Coefficient for an Oxide Layer

산화피막, CuO에 의해 절연된 두 개의 구리도선

$U = 10.0\text{eV}$, $E = 7.0\text{eV}$ 전자의 투과계수

(a) $L = 5.00\text{nm}$, (b) $L = 1.00\text{nm}$

(Solution)

$$\hbar = 1.973 \text{ keV} \cdot \text{\AA}/c, \quad m_e = 511 \text{ keV}/c^2$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m_e(U-E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2(511\text{keV}/c^2)(3.00 \times 10^{-3}\text{keV})}}{1.973\text{keV} \cdot \text{\AA}/c} = 0.8875 \text{ \AA}^{-1}$$

$$T = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[\frac{10^2}{7(3)} \right] \sinh^2(0.8875 \text{ \AA}^{-1})L \right\}^{-1}$$

(a) $L = 50.0 \text{ \AA}$ (5.00nm) $T = 0.963 \times 10^{-38}$

(b) $L = 10.0 \text{ \AA}$ (1.00nm) $T = 0.657 \times 10^{-7}$

→ factor 5의 두께의 감소로 인해 order 31의 투과 증가를 가져온다.

Ex 7.2) Tunneling Current Through an Oxide Layer

예제 7.1의 전선 하나에 1.00mA current of electrons 가 한 도선으로부터 산화피막에 입사된다. 전자의 에너지가 $E = 7.0\text{eV}$ 이고 층의 두께가 1.00nm일 때 인접도선으로 흐르는 전류는 얼마인가? 또 남은 전류는 어떻게 되나?

(Solution)

$$e = 1.60 \times 10^{-19}\text{C}$$

$$1.00\text{mA} = \left(\frac{10^{-3}}{1.60 \times 10^{-19}} \right) \text{electrons/s} = 6.25 \times 10^{15} \text{electrons/s}$$

$$T = 0.657 \times 10^{-7}$$

$$I = (6.25 \times 10^{15})(0.657 \times 10^{-7}) = 4.11 \times 10^8 \text{electrons/s} = (4.11 \times 10^8/\text{s})(1.60 \times 10^{-19}\text{C}) = 6.57 \times 10^{-11}\text{A} = 65.7\text{pA}$$

투과 전류를 뺀 $1.00\text{mA} - 65.7\text{pA}$ 는 산화층에서 반사된다. 입사 쪽에서의 측정 전류는

65.7pA 이다.

Ex 7.3) Transmission Resonances(투과 공명)

$U < E$, square barrier of width L

wave functions, transmission coefficient, the condition of perfect transmission

(Solution)

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{i(-kx - \omega t)} & x < 0 \\ \psi(x,t) &= Fe^{i(kx - \omega t)} & x > L \\ E &= \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \hbar\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= Ce^{i(-k'x - \omega t)} + De^{i(k'x - \omega t)} & 0 < x < L \\ k' &= [2m(E - U)/\hbar^2]^{1/2} ; & \text{real number} \end{aligned}$$

파동함수와 그 기울기가 $x = 0$, $x = L$ 에서 연속인 조건에서

$$A + B = C + D \quad (x = 0, \psi \text{의 연속})$$

$$kA - kB = k'D - k'C \quad (x = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{의 연속})$$

$$Ce^{-ik'L} + De^{+ik'L} = Fe^{ikL} \quad (x = L, \psi \text{의 연속})$$

$$(k'D)e^{+ik'L} - (k'C)e^{-ik'L} = kFe^{ikL} \quad (x = L, \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{의 연속})$$

$$A = \frac{1}{4} Fe^{ikL} \left\{ \left[2 - \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} \right) \right] e^{ik'L} + \left[2 + \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} \right) \right] e^{-ik'L} \right\}$$

$$\text{transmission probability } T = \left| \frac{F}{A} \right|^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \left| \frac{A}{F} \right|^2 = \frac{1}{4} \left| 2\cos k'L - i \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} \right) \sin k'L \right|^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4} \left[\frac{U^2}{E(E-U)} \right] \sin^2 k'L \end{aligned}$$

transmission resonance

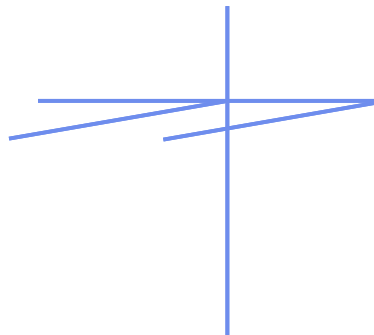
$$k'L = n\pi$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}}$$

$$E = U + n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

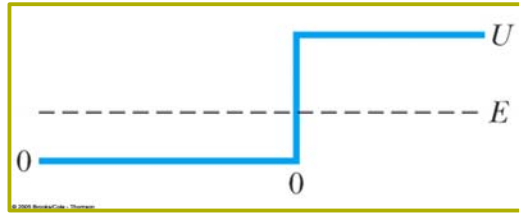
→이 에너지의 전자는 완전 투과(perfect transmission)

Ramsauer-Townsend Effect



$$\begin{aligned} 2k'L + \pi &= (2n+1)\pi \\ k'L &= n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ex 7.4) 퍼텐셜 계단에 의한 산란



(풀이)

$$\psi(x,t) = Ce^{-\alpha x - i\omega t} \quad x > 0$$

$$\psi(x,t) = Ae^{ikx - i\omega t} + Be^{-ikx - i\omega t} \quad x < 0$$

at $x = 0$

$$A + B = C, \quad ikA - ikB = -\alpha C$$

$$\frac{B}{A} = -\frac{(1 + ik\delta)}{(1 - ik\delta)}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left(\frac{B}{A} \right) \left(\frac{B}{A} \right)^*$$

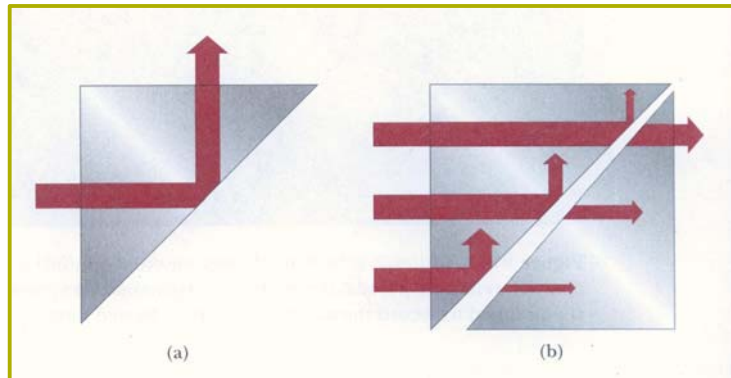
$$R = \left(\frac{1 + ik\delta}{1 - ik\delta} \right) \left(\frac{1 - ik\delta}{1 + ik\delta} \right) = 1$$

→ 무한히 넓은 장벽은 에너지가 벽의 높이보다 적은 모든 입사 입자를 반사한다.

$$\frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} = \frac{-2ik\delta}{1 - ik\delta} \neq 0$$

→ 계단 근처에서는 파동함수가 '0'이 아니다. 그러나 파동함수 $\psi(x,t)Ce^{-\alpha x - i\omega t}$ 는 전파하는 파가 아니다.

"전파하지 않는 장벽내의 파(a barrier wave without propagation)"의 광학현상



(a) beam splitter ; total internal reflection : light entering a right-angle prism is completely reflected at the hypotenuse face, even though an electromagnetic wave, the evanescent wave, penetrates into the space beyond. (b) A second prism brought into near contact with the first can "pick up" this evanescent wave, thereby transmitting and redirecting the original beam. This phenomenon, known as *frustrated total internal reflection*, is the optical analog of tunneling: in effect, photons have tunneled across the gap separating the two prisms.

7.2 장벽 투과, 몇 가지 적용

(Barrier Penetration ; Some Application)

높고 넓은 장벽에 대하여

$U(x)$; potential barrier function

$$T(E) \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \int \sqrt{U(x) - E} dx\right) \quad (7.10)$$

임의의 형태를 가진 벽에서의 근사적 투과계수

→ $E < U(x)$ 인 고전적으로 금지된 영역에서 적분한다.

Square Barrier ; $U(x) = U$, at $0 < x < L$

$$T(E) \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} L\right)$$

장방출(Field Emission)

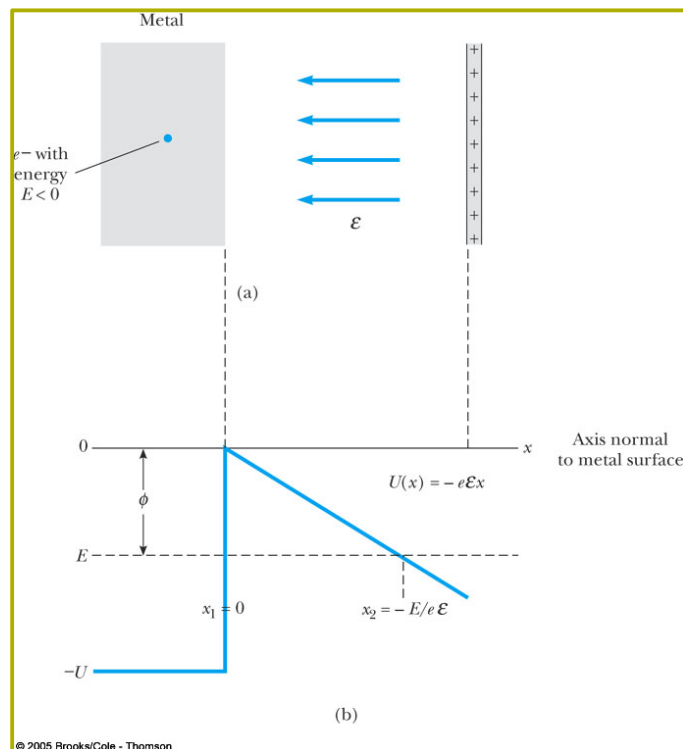
cold cathode emission(차가운 음극방출)

뜨거운 필라멘트보다 전기적 잡음이 적다.

field emission microscope(장방출 전자현미경)

scanning tunneling micrscope(STM)

금속표면에서의 장방출



$$U(x) = -U \quad x < 0$$

$$U(x) = -e \mathcal{E} x \quad x > 0$$

$$E = -e \mathcal{E} x_2$$

전자가 장벽을 넘어 양극으로 터널링할 수 있는 것은 파동성에 의한다.

터널링의 계산 : 식(7.10)을 이용하여

$$\int \sqrt{U(x)-E} dx = \sqrt{e \mathcal{E}} \int_0^{x_2} \sqrt{x_2-x} dx$$

$$= -\frac{2}{3} \sqrt{e \mathcal{E}} (x_2-x)^{3/2} \Big|_0^{x_2}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{e \mathcal{E}} \left(\frac{|E|}{e \mathcal{E}} \right)^{3/2}$$

(7.10)을 이용하면, 장방출에 의한 투과계수는

$$T(E) \simeq \exp\left\{ -\frac{4\sqrt{2m} |E|^{3/2}}{3e\hbar} \right\} \frac{1}{\mathcal{E}} \quad (7.11)$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{4\sqrt{2m} |E|^{3/2}}{3e\hbar} ; \text{특성전기장의 세기} \quad (7.12)$$

예)

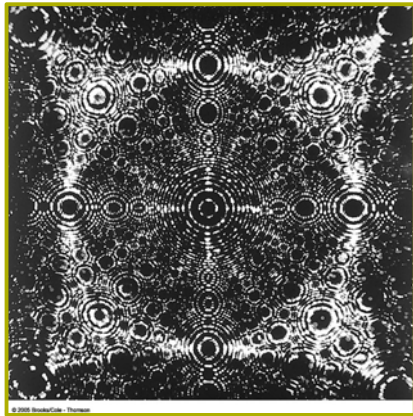
$$|E| = \phi = 4.0\text{eV}$$

$$\mathcal{E}_c = 5.5 \times 10^{10} \text{V/m}$$

→ 실험실 기준으로는 매우 강한 장이나 훨씬 약한 장에서도 장 방출이 일어난다.

$$\rho = 10^{22} \text{electrons/cm}^3 \quad f = 10^{30} \text{collides}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s}) ; \text{not uncommon}$$

$$\sim 10^{10} \text{electrons/s} \sim 1\text{nA} \quad \text{at } \frac{\mathcal{E}_c}{50} \sim 10^9 \text{V/m}$$



※ 이 높은 충돌률은 미시세계와 거시세계를 연결시키는 N_A 와 Fermi level(E_F)의 Free Electron Fermi Gas의 빠른 전자의 속도 ($T_F \sim 5 \times 10^4 \text{K}$)에 기인한다.

그림7.8 결정성 백금 합금을 3,000,000배 확대한 장 방출 현미경 영상. 이 방법을 이용하여 표면층에 있는 각각의 원자를 볼 수 있다.

Ex 7.5) Tunneling in a Parallel plate Capacitor의 leakage current를 추정하라.

$$V = 10\text{kV} \quad d = 0.010\text{mm} \quad \text{Area} = 1.0\text{cm}^2$$

(Sol)

$$\text{충돌 frequency ; } f = 1.0 \times 10^{30} \text{collides}/\text{cm}^2\text{s}$$

$$\text{장방출률(electron emission rate), } A = 1\text{cm}^2$$

$$\lambda = f T(E) = 1.0 \times 10^{30} \exp\left(\frac{-\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} \right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{10\text{kV}}{0.010\text{mm}} = 1.0 \times 10^9 \text{V/m}$$

$$\mathcal{E}_c = 5.5 \times 10^{10} \text{V/m}$$

$$\exp(-55) = 1.30 \times 10^{-24}$$

$$\lambda = 1.30 \times 10^6 \text{electrons/s} ; \text{emission rate}$$

the tunneling current is

$$I = 2.1 \times 10^{-13} \text{A} = 0.21\text{pA}$$

Alpha Decay(알파붕괴)

Table 7.1 Characteristics of Some Common α Emitters

Element	α Energy	Half-Life*
$^{212}_{84}\text{Po}$	8.95 MeV	2.98×10^{-7} s
$^{240}_{96}\text{Cm}$	6.40 MeV	27 days
$^{226}_{88}\text{Ra}$	4.90 MeV	1.60×10^3 yr
$^{232}_{90}\text{Th}$	4.05 MeV	1.41×10^{10} yr

*Note that half-lives range over 24 orders of magnitude when α energy changes by a factor of 2.

© 2005 Brooks/Cole - Thomson

1928년 Gamove, Gume, Condon

1. 한 종류의 원소에서 방출되는 알파 입자는 거의 같은 에너지를 가진다. 알려진 모든 종류는 대략 4MeV에서 9MeV의 좁은 영역의 운동에너지를 가진다.
2. 에너지의 균일성과는 대조적으로 알파 입자를 방출하는 원소의 종류에 따라 반감기는 다양하게 분포하여 10^{20} 배 이상의 차이가 난다.

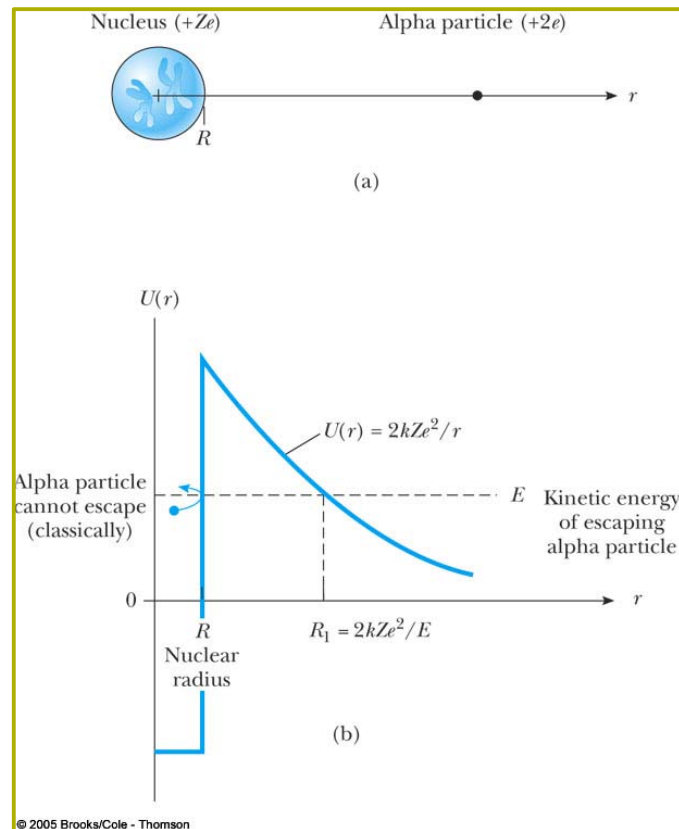


그림 7.9 (a) 방사능 핵의 알파 붕괴. (b) 에너지 E로 방출된 알파 입자가 느끼는 퍼텐셜 에너지. $R = 10\text{fm} = 10^{-14}\text{m}$: 핵의 반경

핵에 구속되어 있는 알파 입자는 쿨롱장벽($\approx 30\text{MeV}$)을 넘기에는 에너지가 충분하지 않다. 핵 내에서 돌아다니는 미리 형성된 α -입자는 퍼텐셜 벽을 통과하는 터널링이 일어나서 붕괴한다.

핵의 반경 ; $R = 10^{-14} \text{m}$ (10 fm), 핵력의 작용

핵의 외부 ; Coulomb force $U(r) = \frac{kq_1q_2}{r}$

♣알파 붕괴의 측정되는 반감기들이 넓은 영역에 분포하는 것은 입자 에너지의 작은 변화에 대한 터널링 비율의 민감성에 의한 것이다.

알파붕괴의 터널링 확률(예제 13.9)

$$T(E) \approx \exp\left\{-4\pi Z\sqrt{\frac{E_0}{E}} + 8\sqrt{\frac{ZR}{r_0}}\right\} \quad (7.13)$$

$r_0 = \hbar^2/m_\alpha ke^2$; 알파입자의 Bohr-반경

$m_\alpha = 7295m_e$ 이므로 Bohr-반경 a_0 는

$$a_0 = 7295r_0 \quad r_0 = a_0/7295 = 7.25 \times 10^{-5} \text{Å} = 7.25 \text{fm}$$

$$E_0 = \frac{ke^2}{2r_0} = \left(\frac{ke^2}{2a_0}\right)\left(\frac{a_0}{r_0}\right) = (13.6\text{eV})(7295) = 0.0993\text{MeV}$$

붕괴률(λ) = 충돌 주파수(f) \times 터널링 확률(T)

$f = v/2R \sim 10^{21}\text{s}^{-1}$; 충돌 주파수(초당 충돌 회수)

$$\lambda = fT(E) \approx 10^{21}\exp\left\{-4\pi Z\sqrt{(E_0/E)} + 8\sqrt{Z(R/r_0)}\right\}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad ; \quad \text{반감기} \quad (7.14)$$

붕괴식

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad ; \quad \text{반감기}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \text{평균수명}$$

$$dN = -N\lambda dt \rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \rightarrow \ln N = -\lambda t + C$$

평균수명

$$\bar{t} = \frac{1}{N_0} \int t |dN| = \frac{\lambda N_0}{N_0} \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt$$

🍌 $|dN| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$: t 의 수명을 가지는 핵자

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \left[\frac{-t}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt \right] \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

예제 13.9 Probability for Alpha Decay

$^{226}_{88}\text{Ra}$ 로부터 5MeV 알파입자의 터널링 확률을 계산한다.

$$T(E) \simeq \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \int \sqrt{U(r)-E} dr\right\}$$

고전적 금지영역, $E < U$: R (핵의 반경) $\sim R_1$

$$R_1 = 2Zke^2/E$$

$$\bullet E = U(R_1) = 2Zke^2/R_1$$

$$\bullet Z$$
: 딸 핵의 원자번호

적분 부분을 계산한다.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{U(r)-E} dr &= \sqrt{E} \int_R^{R_1} \sqrt{\frac{R_1}{r}-1} dr \\ &= R_1 \sqrt{E} \int_{R/R_1}^1 \sqrt{\frac{1}{z}-1} dz \end{aligned}$$

$$\bullet z = r/R_1$$

풀리는 적분. 근사계산을 시도한다.

$E \sim 5\text{MeV}$ 일 때 $R \sim 10\text{fm}$; $R_1 \sim 50\text{fm}$ 이므로 근사적으로 하한을 0으로 취하고

$$z = \cos^2\theta$$

로 변수변환을 한다.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{z}-1} dz &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

이 계산을 개선하기 위해, 원래의 적분을 두 부분으로 나누고 두 번째 적분을 근사한다.

z 가 작은 경우 $1/z \gg 1$ 이고

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{z}-1} dz - \int_0^{R/R_1} \sqrt{\frac{1}{z}-1} dz \\ = \frac{\pi}{2} - \int_0^{R/R_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} \approx \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_1}} \end{aligned}$$

$R_1 = 2Zke^2/E$ 을 적용하면 터널링 확률은

$$T(E) = \exp\left\{-4\pi Z \sqrt{(E_0/E)} + 8 \sqrt{Z(R/r_0)}\right\}$$

$$\bullet r_0 = \hbar^2/M_\alpha k e^2 = 7.25 \text{ fm: 알파입자의 보아 반경}$$

$$\bullet E_0 = \frac{ke^2}{2r_0} = \frac{14.40\text{eV} \cdot \text{\AA}}{(2)(7.25 \times 10^{-5} \text{\AA})} = 0.0993 \text{ MeV}$$

라듐의 알파붕괴에서, 딸 핵 라돈의 원자번호와 질량수는 $Z=86$, $A=222$

라돈 핵의 반경 R 은 식(13.1)로부터

$$R = (1.2 \times 10^{-5} \text{ fm})(222)^{1/3} = 7.27 \text{ fm}$$

$E=5 \text{ MeV}$ α -입자의 터널링 확률은

$$\begin{aligned} T &= \exp\left\{-4\pi(86) \sqrt{(0.0993/5)} + 8 \sqrt{86(7.27/7.25)}\right\} \\ &= \exp(-78.008) = 1.32 \times 10^{-34} \end{aligned}$$

예제 7.6 토륨(Th)과 폴로늄(Po)의 반감기 구하기

1) Th(Z=90)의 알파붕괴 반감기 Th의 딸핵은 라돈(Z=88)
 $Z = 88 \quad E = 4.05 \text{ MeV} \quad R = 9 \text{ fm}$
 $\exp\{-4\pi(88)\sqrt{0.0993/4.05} + 8\sqrt{88(9/7.25)}\}$
 $= \exp(-89.542) = 1.29 \times 10^{-39}$
 $\lambda = (10^{21} \text{ Hz})(1.29 \times 10^{-39}) = 1.29 \times 10^{-18} \text{ (알파입자/s)}$

반감기는

$$t_{1/2} = \frac{0.693}{1.29 \times 10^{-18}} = 5.37 \times 10^{17} \text{ s} = 1.70 \times 10^{10} \text{ yr}$$

실제 값 $1.4 \times 10^{10} \text{ yr}$ 와 잘 맞는다.

2) Po의 알파붕괴 반감기

Po(Z=84)의 딸 핵은 Pb(Z=82)

$Z = 82 \quad E = 8.95 \text{ MeV}$
 $\exp\{-4\pi(82)\sqrt{0.0993/8.95} + 8\sqrt{82(9/7.25)}\}$
 $= \exp(-27.825) = 8.23 \times 10^{-13}$
 $\lambda = 8.23 \times 10^{+8}$

반감기는

$$t_{1/2} = \frac{0.693}{8.23 \times 10^8} = 8.42 \times 10^{-10} \text{ s}$$

Po의 측정된 반감기 : $t_{1/2} = 3.0 \times 10^{-7} \text{ s}$

→에너지의 2배의 차이가 반감기에서 10^{26} 배 차이로 나타난다.(계산상)

암모니아 반전

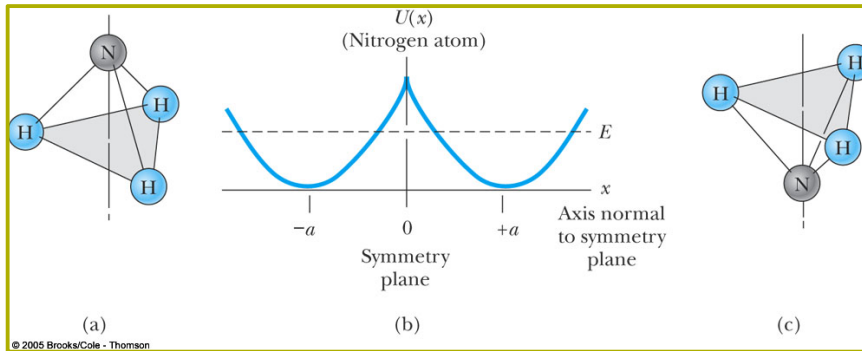


그림 7.10 (a) 암모니아 분자 NH₃의 첫 번째 평형위치 (b) 질소 원자가 느끼는 퍼텐셜 에너지. (c) 두 번째 평형위치

두 평형상태에서 암모니아 분자의 질소 원자는 이중 진동자를 구성한다.
 flopping 주파수의 존재 ; 10^{10} Hz

$$U(x) = \frac{1}{2} M \omega^2 (|x| - a)^2 \quad (7.15)$$

$E = \frac{1}{2} \hbar \omega$: 최소의 진동 에너지를 가질 때

$U(x) = E$ 인 경우 : 네 개의 고전적 회귀점

$x = \pm(a - A)$: $x = 0$ 에 가까운 두 개의 회귀점

🍌 A : 단일 진동자 우물 내의 질소 원자의 진동 진폭

$$\frac{1}{2} \hbar \omega = \frac{1}{2} M \omega^2 A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} \quad (7.16)$$

터널링 적분

$$\begin{aligned} \frac{2}{\hbar} \sqrt{2M} \int_{-(a-A)}^{a-A} \sqrt{U(x)-E} dx &= \frac{4}{A^2} \int_0^{a-A} \sqrt{(x-a)^2 - A^2} dx \\ \frac{4}{A^2} \int_0^{a-A} \sqrt{(x-a)^2 - A^2} dx &= \sinh(2y_0) - 2y_0 \\ \cosh(y_0) &= a/A \end{aligned}$$

투과계수는

$$T = e^{-[\sinh(2y_0) - 2y_0]} \quad (7.17)$$

질소 원자가 퍼텐셜 장벽과 충돌하는 진동수

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\hbar}{2\pi MA^2}$$

터널링 비율

$a = 0.38 \text{ \AA}$: x-선 회절측정으로부터

$$U(0) = 0.25690 \text{ eV}$$

식(7.15)와 (7.16)을 이용하고 $M = 14u$ 로 두면

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\hbar^2 a^2}{2MU(0)} \right)^{1/4} \\ &= \left(\frac{(1.973 \text{ keV} \cdot \text{\AA})^2 (0.38 \text{ \AA})^2}{2(14)(931.50 \times 10^3 \text{ keV}/c^2)(0.2569 \times 10^{-3} \text{ keV})} \right)^{1/4} = 0.096 \text{ \AA} \end{aligned}$$

실제 질소의 질량은 질소-수소의 환산질량으로 보정되면

$$M = 2.47 u$$

$$A = 0.148 \text{ \AA}$$

$$\lambda = fT \approx 2.4 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

🍌 관측 터널링 비율 : $2.4 \times 10^{10} \text{ Hz}$, $\rightarrow A = 0.125 \text{ \AA}$

플롭핑 진동수가 마이크로파 영역에 있으므로, 암모니아 분자는 마이크로파 복사의 증폭기로 사용될 수 있다.

암모니아 메이저(ammonia maser)의 원리

블랙홀의 붕괴

블랙홀 : 사상의 지평선 내부의 것은 어떤 것도 블랙홀의 중력에 의한 인력을 이겨내고 밖으로 나올 수 없다.

Stephen Hawking ; 1974년, 블랙홀의 복사

블랙홀을 둘러싸고 있는 중력퍼텐셜 벽을 통해서 일어나는 터널링 과정을 통해서 많은 양의 입자를 방출한다.

블랙홀의 장벽의 두께는 블랙홀의 크기에 비례하므로, 터널링의 확률은 처음에는 매우 작을 것이나

블랙홀이 입자를 방출할수록 질량과 크기가 줄어들어 보다 많은 입자가 터널링을 쉽게 할 수 있다.

방출은 방출 비율을 증가시키면서 계속되어, 블랙홀은 결국에는 자기 자신을 복사하여 폭발적인 절정으로 사라지게 된다.

태양 질량의 블랙홀 : 10^{66} yr

수억만 톤 질량의 양성자 크기의 블랙홀 : 10^9 yr (10억년)

서너 배 더 무거운 블랙홀은 아직도 강하게 증발하고 있을 것이다.(우주의 빅뱅 기원 바로 직후에 생성된 블랙홀. 우주의 나이: 130억년) \rightarrow 우주에서 오는 감마선

주사 터널링 현미경

STM(Scanning Tunneling Microscope) : 2 Å

광학 현미경 : 2000 Å

전자 현미경 : Gred Binnig, Heinrich Rohrer(I(IBM 연구소)

파장이 4 Å 인 경우

분해능 : 2 Å

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3100 \text{ eV} / c$$

$$v = p / m_e = 1.8 \times 10^6 \text{ m/s}$$

이 속도의 전자는 금속조각 내부로 뚫고 들어가므로, 개별적인 표면 원자에 대한 정보를 주지 못한다.

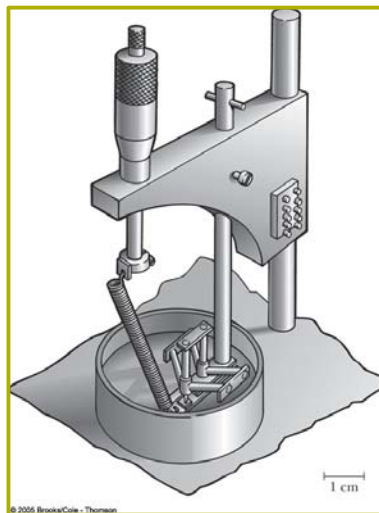


그림 2. 주사 터널링 현미경(STM)의 개략도

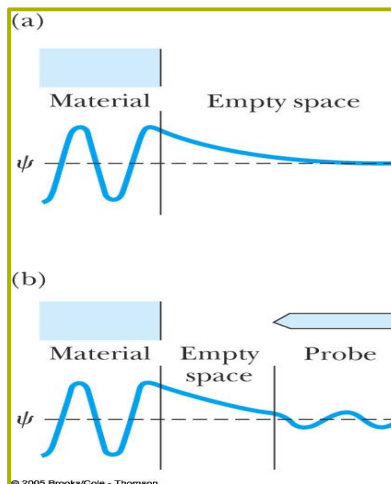


그림 3.

일반적인 경우

$$U - E = 4.0 \text{ eV}$$

투과 깊이는

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e(U-E)}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_e c^2(U-E)}} = \frac{1.973\text{keV} \cdot \text{\AA}}{\sqrt{2(511\text{keV})(4.0 \times 10^{-3}\text{keV})}}$$

$$= 0.98 \text{\AA} \approx 1.0 \text{\AA}$$

터널링 전류밀도

$$j = \frac{e^2 V}{4\pi^2 L \delta \hbar} e^{-2L/\delta}$$

STM은 탐침과 표면 사이의 거리 L에 민감하다.

$\delta \approx 1.0 \text{\AA}$ 일 때 거리(L)를 0.01\AA 증가시킬 때

$$e^{-2(0.01 \text{\AA})/(0.1 \text{\AA})} \approx 0.98$$

2% 감소

$L > 10 \text{\AA}$: 터널링은 일어나지 않는다.

탐침 끝 : 1개 또는 2개의 원자가 있다.

$L \approx 2 \text{\AA}$: 터널링 전자가 측정된다.

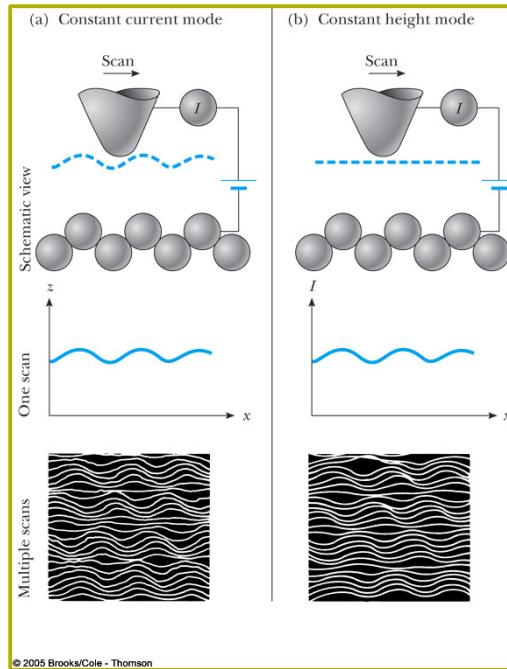


그림 4. (a) 일정 전류 방법 (b) 일정 높이 방법

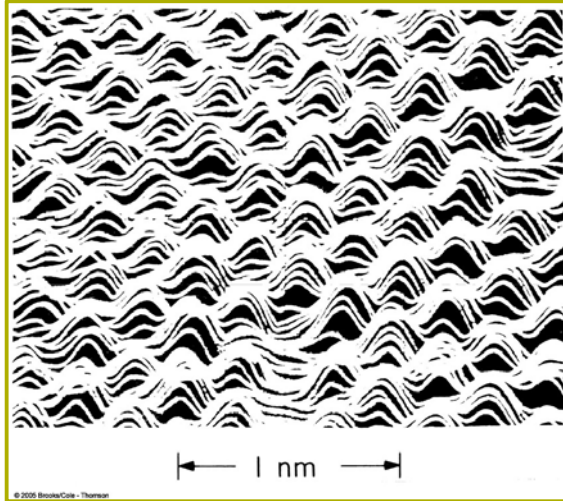


그림 5. 액체 질소에 담겨진 TaS₂의 표면에서의 원자의 영상

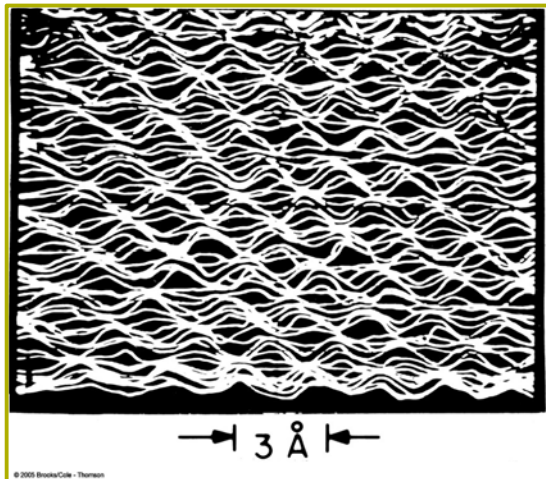


그림 6. 은도금에 사용되는 전해질에서 얻은 흑연의 영상

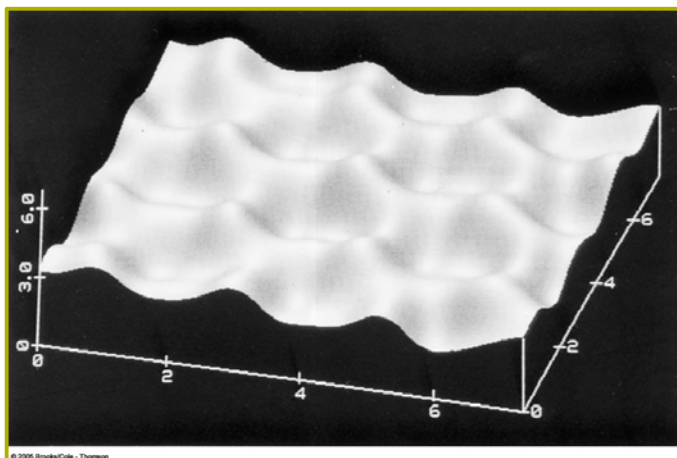


그림 7. 상업용 STM을 이용한 공기 중에서의 흑연 영상